



**Enrique ALARCÓN**

*Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Académico Numerario de la Academia de Ingeniería*

12.1. LA EVOLUCIÓN DE LOS MODELOS ABSTRACTOS	
HASTA MEDIADOS DEL SIGLO XX .....	210
12.2. EL ENTORNO DE EDUARDO TORROJA .....	214
12.3. TODA INNOVACIÓN NO ES SINO OLVIDO .....	219
12.4. ALGUNAS LÍNEAS CON FUTURO .....	224
12.4.1. Enseñanza .....	224
12.4.2. Investigación .....	226
12.5. SIEMPRE SE LLEGA A ALGÚN LADO SI SE CAMINA	
LO SUFICIENTE .....	231
12.6. REFERENCIAS .....	231

La perspicacia de Torroja, puesta de manifiesto en los temas desarrollados en capítulos anteriores, aparece también cuando se analiza su dominio de los métodos de cálculo y sus contribuciones a la ordenación de su enseñanza según un esquema que ha sido seguido hasta hoy por la mayoría de las escuelas de ingeniería españolas.

El enfoque científico de los problemas constructivos surge con el famoso “*Diálogo y demostración matemática*” de Galileo sobre “*las dos nuevas ciencias*” publicado en Leiden [1] en 1638, donde el sabio toscano se planteaba problemas típicos de la Resistencia de Materiales (que era una de las dos nuevas ciencias que anunciaba el título). Con este progenitor no es de extrañar que el método ingenieril siga un proceso semejante al de la ciencia positiva: tras una primera etapa de observación de la naturaleza o de las construcciones existentes se detectan fenómenos curiosos que se intentan reproducir en modelos físicos o abstractos. El estudio de la respuesta de estos modelos a las acciones debidas al medio ambiente permite una comprensión de su funcionamiento y la construcción de un artefacto (sea una maquina, una edificación o un detalle constructivo) que cumple los requisitos que se desean. Este prototipo es sometido a las acciones reales y de su observación, repitiendo el proceso, se adquieren enseñanzas que permiten mejorar la solución. En el mundo de la producción industrializada, la etapa siguiente es la fabricación en serie y, en el de la construcción, el establecimiento de un “*estado del arte*” que se recoge en Códigos o Normas de buena práctica, que se van actualizando de acuerdo con los nuevos conocimientos adquiridos o con las exigencias sociales.

Eduardo Alonso ya ha relatado las contribuciones de Torroja al progreso de los modelos físicos y es el momento de hablar sobre su dominio de los modelos numéricos. En las páginas que siguen, tras un somero recuerdo de la evolución de los métodos de cálculo en la Mecánica estructural, se describe la línea que él decidió escoger, así como las características de su entorno, lo que aclara sus posibles fuentes de inspiración. Siguiendo la línea reflexiva de esta conmemoración, se recuerda la evolución de los acontecimientos posteriores a su muerte, así como algunas líneas de investigación actualmente abiertas.

## 12.1. LA EVOLUCIÓN DE LOS MODELOS ABSTRACTOS HASTA MEDIADOS DEL SIGLO XX

A la obra de Galileo sigue una primera etapa en que autores geniales como Bernoulli, Euler, Coulomb, etc. se dedican a plantear problemas particulares y dispersos en los que experimentan las herramientas matemáticas que iban descubriendo dando soluciones que suelen pasar desapercibidas para los constructores o son motivo de polémicas como la producida por el informe de “*los tres matemáticos*” (1742) sobre las grietas en la cúpula vaticana [2]. Tras estas demostraciones de la capacidad de análisis con modelos abstractos la revolución napoleónica de la enseñanza de la ingeniería conduce a una fase de formalización y clarificación que comienza con la “*Mecánica Analítica*” de Lagrange [3] (1788) y sigue con el establecimiento de los métodos de rigidez y flexibilidad [4] (1826) y de las ecuaciones de campo de la elasticidad [5] (1821) por Navier, el planteamiento riguroso de la elasticidad por Cauchy [6] (1827) y la definición por George Green [7] (1839) de lo que hoy entendemos por cuerpo hiperelástico.



**Figura 1. Galileo, Euler, Lagrange.**

A partir de este momento se desarrollan diferentes líneas de trabajo y numerosas contribuciones entre las que destacan las de Maxwell, Neumann, Saint-Venant, Kirchhoff y Clebsch [8] (1862). Este último, en el capítulo final de su libro, redescubre el método de la rigidez e incluso utiliza una notación con doble subíndice para identificar los términos de lo que hoy llamamos matriz de rigidez que le permite observar la reciprocidad basada en la simetría. No obstante, el uso decidido por el propio Navier y sus sucesores del método de la flexibilidad en base al número de ecuaciones a resolver hace que esta alternativa no sea tenida en cuenta.

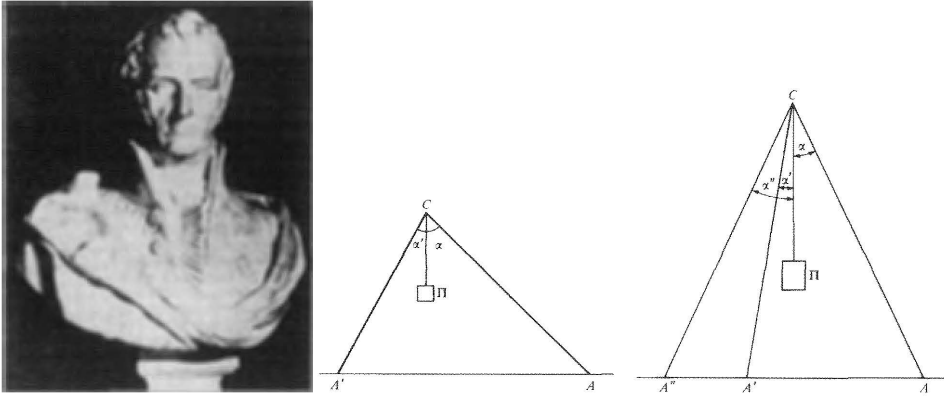


Figura 2. Navier, Leçons [4] (1826).

Quedan así como líneas maestras para el cálculo de estructuras los métodos basados en el principio de los trabajos virtuales [9] (Mohr 1874), la estática gráfica creada por Culmann [10] (1866) y los métodos energéticos propuestos por Castigliano [11] (1879) y popularizados por Müller-Breslau [12] (1886).



Figura 3. Mohr, Culmann, Castigliano.

No deja de ser curiosa la agria polémica entre este último y Mohr sobre los resultados obtenidos entre el principio de los trabajos virtuales y el método de Castigliano.

Aunque Müller-Breslau desautoriza la interpretación dada por Mohr a “*die neueren methoden*” no deja de utilizar, dando muestras de su eclecticismo, el principio de los trabajos virtuales, y muestra (figura 4) cómo simplificar el trabajo de cálculo usando como sistema de esfuerzos en equilibrio con la carga unitaria exterior uno que los haga nulos en la mayor parte posible de la estructura. Es lo que algunos autores modernos han llamado el “*método de la estructura virtual*”.

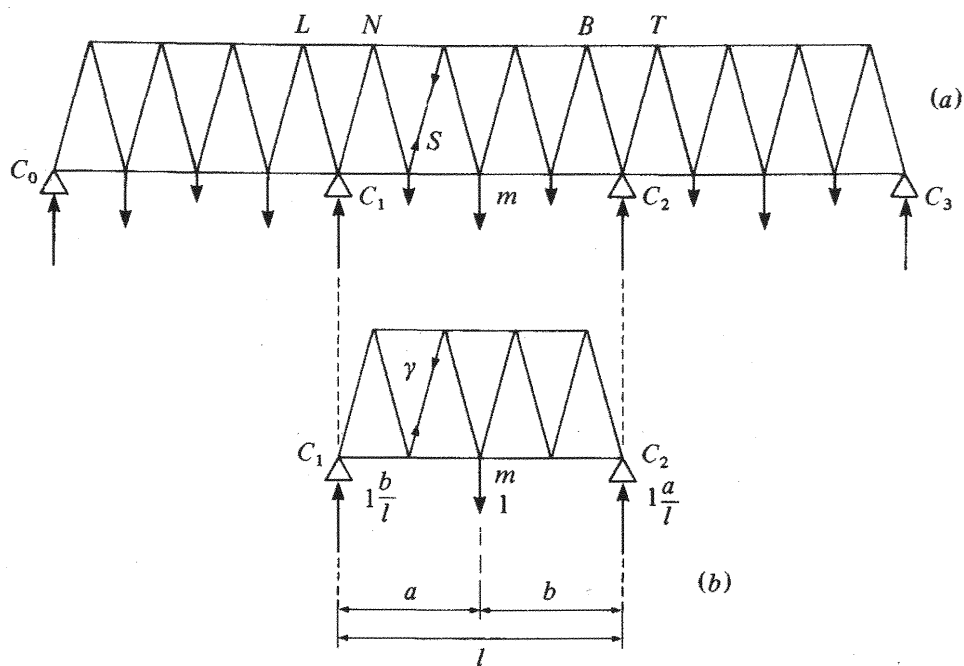


Figura 4. El “*método de la estructura virtual*” según Müller-Breslau [12] (1886)

Como se indicará más adelante, estos son los autores más influyentes en los profesores españoles, que debieron optar entre las diferentes posibilidades. Ni Mohr ni Culmann llegaron a aceptar que el método de Castigliano aportase alguna novedad, y pronto Crotti [13] y Engesser [14] mostraron que era errónea la apreciación de aquél sobre la naturaleza de la energía que se deriva para obtener los desplazamientos. De hecho, energía elástica y energía complementaria aparecen relacionadas por una transformación de Legendre que posibilita la canonización del planteamiento en forma semejante a la desarrollada por Hamilton. Esta línea fue seguida por Max Born y Hellinger, que en 1914 estableció el Principio Canónico de la Energía Potencial, base de

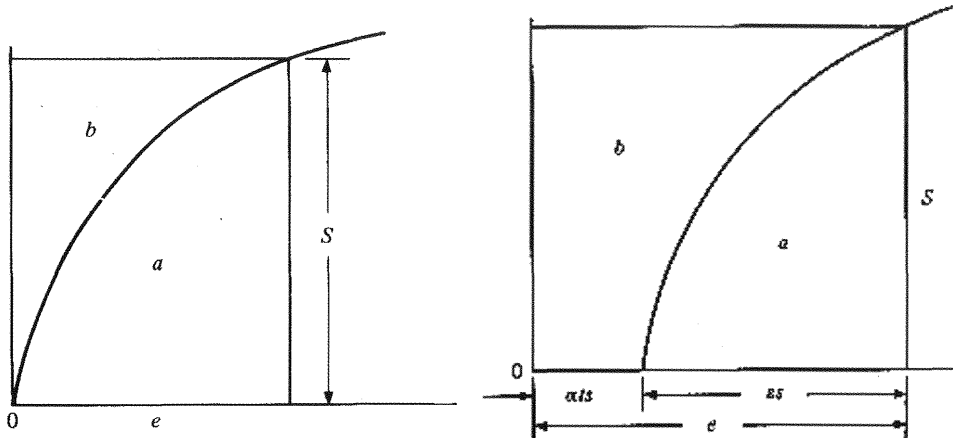


Figura 5. Energía elástica (a) y energía complementaria (b). Engesser (1889)

los desarrollos posteriores de Reissner, Veubeke y Washizu. Ello no impide reconocer que el principio de los trabajos virtuales es la base de todos los principios variacionales y que, a pesar de los ataques de Müller-Breslau, Mohr estaba en lo cierto.

En 1877 aparece la primera edición de la Teoría del sonido de Lord Rayleigh [15], que todavía se puede leer con aprovechamiento, y en la que se ponen las bases del método que, desarrollado por Ritz [16] (1908) y popularizado por Timoshenko [17] (1910) en sus aplicaciones ingenieriles, ha dado lugar a los mejores planteamientos de la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, análisis funcional y métodos proyectivos de aproximación. También a principios de siglo (1909) se produce la interesante interpretación de la elasticidad por los hermanos Cosserat [18] que, en el equilibrio del tetraedro elemental, además del vector tensión introducen el momento por unidad de superficie, dando lugar a la teoría de los medios micropolares.

A partir de este momento son continuos los movimientos liderados por la escuela rusa (Galerkin, Sobolev, Mushkelisvili, Novozhilov) que conducen a una clarificación del enfoque matemático de la elasticidad, así como aportaciones tanto matemáticas (Klein, Hilbert, Volterra, Almansi, Jaumann, Synge, Love, Trefftz o Biot), como físicas (Reiner [19], Rivlin, Prandtl, Flügge, Koiter, Griffith, Drucker, Prager).

Es a mitad de siglo cuando Truesdell [20] inicia la reconsideración de los planteamientos no-lineales y el rigor de las definiciones que ha conducido al desarrollo de lo que podría llamarse una escuela físico-matemática muestra de lo cual son las obras de Villaggio [21] y Marsden y Hughes [22].



**Figura 6. Lord Rayleigh, Timoshenko.**



**Figura 7. Reissner, Prager, Drucker.**

## **12.2. EL ENTORNO DE EDUARDO TORROJA**

Para comprender la elección llevada a cabo por Torroja conviene repasar la línea tomada en la Escuela de Caminos con la Elasticidad y Resistencia de Materiales desde su fundación. A este respecto cabe indicar que, a falta de aportaciones originales, siempre se mantuvo un importante contacto con las publicaciones extranjeras, lo que permitió a la profesión mantenerse al tanto de lo que sucedía. Así, Saavedra [23], autor de varias publicaciones, combi-



na su interés por los planteamientos teóricos de Poncelet y Navier con los trascendentales ensayos de Fairbairn, cuya obra sobre aplicaciones del hierro fundido y forjado a las construcciones fue traducida y publicada casi simultáneamente con la versión inglesa.

Además, en época muy temprana escribe el que probablemente sea el primer libro en español de Resistencia de Materiales (figura 8), absolutamente influido por la Escuela francesa, como demuestra también su extraordinaria obra sobre puentes colgados.

Lo mismo puede decirse respecto al contacto con el exterior de Echegaray y Zafra, a quienes Torroja reconoce como sus maestros “... cuando se siente el influjo de la savia matemática que Echegaray y Zafra vierten con sus teorías de la Elasticidad y de las Estructuras, respectivamente...” [24], aunque en el caso del último la influencia es predominantemente alemana.

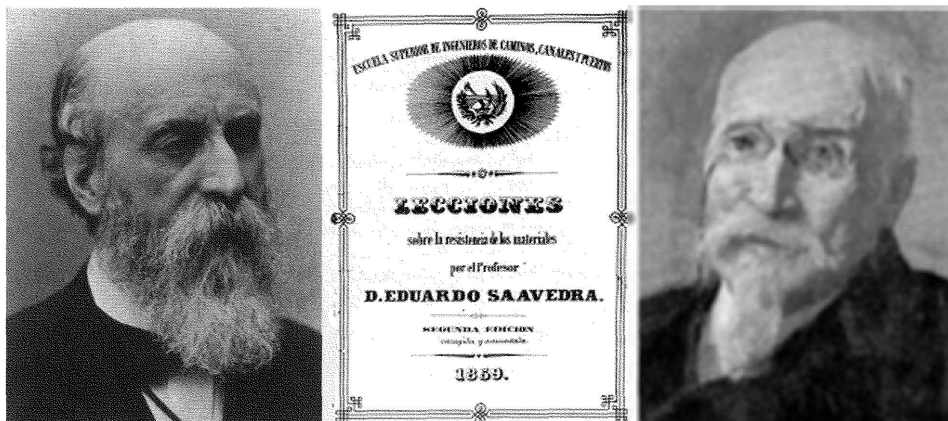


Figura 8. Saavedra, Echegaray.

Los años de formación estructural de Torroja están marcados por la presencia, junto al ecléctico Mendizábal, de dos personalidades tan opuestas y a la vez complementarias como Zafra y Ribera<sup>1</sup>.

Al interés por el hormigón armado unían ambos su curiosidad por lo que sucedía en el extranjero. La figura de Ribera, que fundó su empresa constructora hace ahora también 100 años, ha sido glosada en otro lugar [25] y a ella hace referencia Rui-Wamba en su comunicación. Personalidades como el

1. Todavía recuerdo la impresión que me produjo, el año de ingreso en la Escuela, recibir las clases en un aula presidida por los retratos de ambos; separados, eso sí, por las jambas de la puerta de entrada.

propio Torroja, Entrecanales, Sánchez del Río, Fernández Conde, etc. se formaron con él y sirven para calificar la importancia de su huella.

En relación con el contenido de este capítulo interesa más la figura de Zafra como sabio profesor y autor, aparte el primer tratado en español de hormigón armado, de uno de los mejores libros de cálculo de estructuras que se ha publicado en nuestro país [26]. En él da pruebas de dominar las obras de la escuela alemana y, quizá por influencia de Müller-Breslau, escoge el método de Castigliano basándose en muy discutibles apreciaciones: “... *A nuestro juicio el teorema de Castigliano, más amplio en concepción, menos artificioso que el de Mohr...*”, aunque inmediatamente reconoce que “... *en la práctica usaremos indiferentemente de uno o de otro...*”. La puesta al día del libro se pone de manifiesto cuando, al estudiar los problemas de estabilidad elástica, se hace referencia a los trabajos de Timoshenko publicados tan sólo cinco años antes.

Torroja ingresó en la Escuela de Caminos en 1917, un año antes que Ribera se incorporase como profesor y dos años antes de que Zafra leyese su discurso de ingreso en la Academia de Ciencias [27], donde de forma taxativa planteaba su ideario “... *el progreso de la Construcción exige cada día mas imperiosamente el progreso de la Mecánica Aplicada...*”. Es de imaginar el impacto que este hecho y el enorme prestigio de que Zafra gozaba en la Escuela causarían en Torroja y por eso no es de extrañar que al igual que Peña [28], discípulo y sustituto de aquél, siguiese la senda trazada por su maestro cuando en 1939 debió ocuparse de las enseñanzas de Resistencia de Materiales y Cálculo de estructuras.

Previamente la línea de estática gráfica se había mantenido en el curso de Granda sobre Mecánica Aplicada a la Construcción [29] y Entrecanales intentó reavivarla a partir de 1931 según cuenta Lorente de No en su excelente obra de 1952 [30].

Si el método energético era ideal para intentar conectar con los planteamientos canónicos de la mecánica racional, las publicaciones de Hardy Cross [31] en los años 30 produjeron un impacto enorme que dejó tan desconcertados a los viejos maestros como el método de Castigliano había dejado a Mohr y Culmann. Así en el capítulo VII de la tercera edición de su Mecánica Elástica, Peña escribe: “*Si ahora volvemos la vista al capítulo V de esta obra ¿no está todo esto en cuanto a concepto y desarrollo, contenido en aquél capítulo? Pero con la diferencia de ser mucho más claro y de mayor facilidad didáctica aquél, además de que el proceso operatorio se hace más sistemático y de más diáfana representación gráfica. ¿Dónde está pues la originalidad del método de Cross?*”. Opinión que contrasta con el entusiasta seguimiento del método por parte de toda la profesión y con la de Carlos Fernández Casado, que desde 1934 lo defendía desde la Revista de Obras



**Figura 9. Zafra, Torroja, Fdez. Casado.**

Públicas, donde en los años 50 se estableció una curiosa polémica sobre las estructuras traslacionales cerrada brillantemente por Lorente de No. En la séptima edición de su libro más popular [32] Fernández Casado da la clave del éxito: “... *El esquema de cálculo es siempre el mismo, lo cual permite al ingeniero o arquitecto que proyecta emplear el mínimo de tiempo en prepararlo y a los auxiliares que calculan hacerlo con el menor esfuerzo utilizando experiencias anteriores...*”.

En este ambiente Torroja publica entre 1949 y 1954 la serie de Monografías [33-37] que han servido de base a la enseñanza de las Estructuras y de la Resistencia de Materiales en las escuelas de Caminos hasta bien recientemente y que han sido utilizadas para estructurar los distintos bloques de la enseñanza de la mecánica estructural en muchas escuelas de ingeniería españolas. Por su carácter de tratado “*de tipo práctico y general*” no incluye bibliografía, lo que podría haber servido para calibrar el criterio de selección de los temas. Se observa que éstos están graduados de mayor a menor abstracción, y si en la ref. 33 la preocupación es la formalización matemática y el establecimiento de un léxico y una notación rigurosas, en las siguientes (vg. 35, 36) aparecen sobre todo aspectos prácticos, como tabulaciones para ordenar los cálculos, dedicándose la final [37] a un estudio sistemático del método de Cross, sin ningún intento de matematización, que se afronta someramente en la comunicación a la Academia de Ciencias de 1949 [39].

Otro de los méritos de estas monografías es el intento de descripción clara de los fundamentos comunes a los métodos y la evitación, no siempre conseguida, del fárrago de casos particulares que reducían a recetarios las obras de sus predecesores.

Desgraciadamente, ni Torroja ni el resto de autores españoles citados plantearon la interpretación del Cross como un método de la rigidez, lo que hubiese facilitado la reconsideración del marco global. Tampoco es posible, debido a la precitada falta de referencias, conocer su opinión sobre la versión dada por Engesser, es decir, sobre la dualidad energía elástica-energía complementaria puesta de manifiesto a finales del siglo XIX. Al obviarla se perdió la capacidad de tratamiento unificado de comportamientos monótonos no lineales y, sobre todo, una posibilidad de formación de los estudiantes en el sentido de la conexión con las ramas más avanzadas de la Mecánica, lo que podría haber justificado la preferencia de los métodos basados en el potencial frente a la simplicidad del principio de los trabajos virtuales defendido por Mohr y de tanta utilidad en los métodos actuales.

Cabe decir que las opciones tomadas por Torroja para la enseñanza de los modelos abstractos son conservadoras en relación con sus conocimientos y eso se pone de manifiesto en su celebrado libro de Elasticidad (*“Torroja was a specialist in stress analysis as well as a designer and he wrote a **highly regarded book** on the mathematical theory of elasticity”* [40]) donde, en aras de la sencillez, se renuncia al uso del cálculo tensorial y a los métodos de Muskhelishvili que, a través de las referencias, se demuestra conocer tanto como el libro de Clebsch, en la versión de Saint-Venant, que es el tratado cumbre de la Elasticidad clásica. En este tema, al igual que en cálculo de estructuras, el panorama español era muy bueno, gracias a una obra de gran calidad dedicada a la enseñanza de los arquitectos (Arangoá [41] 1945) y a algunos intentos de mayor profundidad, como el de Valdés Patac [42], desarrollado en el Instituto de la Construcción, o los estudios del también Académico Federico Goded culminados en su interesante libro de 1959 [43]. Es la época en que Velasco de Pando [44] publica su monografía sobre Plasticidad, a la que seguirá la de Benito [45], directamente inspirada por Torroja para ser utilizada como material docente, lo que ha cumplido sobradamente en sucesivas ediciones que han contribuido a formar la mentalidad de decenas de promociones de ingenieros.

Asimismo existen aportaciones a estos temas desde el otro foco de modernización creado alrededor de la también extraordinaria figura de Esteban Terradas [46]. Aparte su interesante libro sobre estabilidad [47], propició la publicación de tratados renovadores como el de Karman y Biot [48] donde la filosofía de la enseñanza a los ingenieros es: *“... la necesidad no es de **más matemáticas** sino de una mejor comprensión sobre el modo de aplicarlas...”*; pero, sobre todo, creó un grupo de trabajo, el Seminario de Estudios Superiores de Física y Matemáticas donde, por ejemplo, tan sólo dos años después que Koiter defendiese su revolucionaria tesis doctoral [49], propuso a M. A. Hacar su estudio (en holandés, por supuesto) y de hecho en el curso

1949-50 el programa del Seminario incluía “*Pandeo y abolladura de superficies*” como tema a desarrollar por Hacar y el propio Terradas. En este Seminario participaron también los Académicos Sánchez del Río y Millán quien, además de sus aportaciones a la investigación de corrientes gaseosas, desarrolló una muy actualizada teoría matemática de la Plasticidad [50].

Como puede verse, el entorno en que se movió Torroja era enormemente activo y brillante no sólo en lo relativo a Elasticidad y Cálculo de Estructuras sino también en cuanto a modelos de leyes de comportamiento nuevas como la plasticidad o la viscoelasticidad, en la que Torroja y Paez [51] hicieron una interesante contribución recogida por Reiner y a la que se refiere Elices en su comunicación.

Esa puesta al día continua, favorecida por las sistemáticas visitas de profesores extranjeros al Instituto de la Construcción, podría haber servido para enlazar con la etapa siguiente, dominada por el ordenador, si la muerte de Torroja en 1961 no hubiese impedido el año sabático que Argyris [52], autor de una magnífica monografía sintética (1960) [53], tenía previsto disfrutar en el Instituto.

### 12.3. TODA INNOVACIÓN NO ES SINO OLVIDO

Posiblemente sea la frase que Bacon pone en labios de Salomón la que mejor resume la sensación que se siente cuando se contempla el cambio brutal de orientación hacia el método de la rigidez que se ha experimentado en la segunda mitad del siglo debido a la aparición en 1950 del UNIVAC, primer ordenador comercial basado en la tecnología electrónica y en la idea de programa almacenado.

Además, en forma semejante al impulso que el desarrollo de los ferrocarriles dio a la Mecánica del Continuo, es en el marco de una nueva industria, la aeronáutica y astronáutica, que tiene que vérselas con estructuras de una complejidad formidable, donde surgen las mejores iniciativas.

Milagrosamente se produce la confluencia de herramientas, necesidades e ideas, y en 1956 se publica el artículo de Turner, Clough, Martin y Topp [54] (figura 10) donde se vierten las primeras aplicaciones del método de los Elementos Finitos, que desde entonces es paradigma tanto de investigación como de aplicaciones prácticas.

La evolución ha sido tan fuerte y tan compleja que desde la corta perspectiva personal es imposible no dejarse guiar por los propios prejuicios.

En el campo del cálculo de estructuras de edificación la evolución fue trabajosa por varias razones. En primer lugar, la maestría alcanzada en el manejo de los métodos anteriores hacía difícil evitar reacciones semejantes a las

# JOURNAL OF THE AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23

SEPTEMBER, 1956

NUMBER 9

## Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,\* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP\*\*

### ABSTRACT

A method is developed for calculating stiffness influence coefficients of complex shell-type structures. The object is to provide a method that will yield structural data of sufficient accuracy to be adequate for subsequent dynamic and aerelastic analysis.

Stiffness of the complete structure is obtained by summing stiffnesses of individual units. Stiffnesses of typical structural components are derived in the paper. Basic conditions of continuity and equilibrium are established at selected points (nodes) in the structure. Increasing the number of nodes increases the accuracy of results. Any physically possible support conditions can be taken into account. Details in setting up the analysis can be performed by nonengineering trained personnel; calculations are conveniently carried out on automatic digital computing equipment.

Method is illustrated by application to a simple truss, a flat plate, and a box beam. Due to shear lag and spar web deflection, the box beam has a 25 per cent greater deflection than predicted from beam theory. It is shown that the proposed method correctly accounts for these effects.

Considerable extension of the material presented in the paper is possible.

### (I) INTRODUCTION

PRESENT CONFIGURATION TRENDS in the design of high-speed aircraft have created a number of difficult, fundamental structural problems for the worker in aerelasticity and structural dynamics. The chief problem in this category is to predict, for a given elastic structure, a comprehensive set of load-deflection relations which can serve as structural basis for dynamic load calculations, theoretical vibration and flutter analyses, estimation of the effects of structural deflec-

tion on static air loads, and theoretical analysis of aerelastic effects on stability and control. This is a problem of exceptional difficulty when thin wings and tail surfaces of low aspect ratio, either swept or unswept, are involved.

It is recognized that camber bending (or rib bending) is a significant feature of the vibration modes of the newer configurations, even of the low-order modes; in order to encompass these characteristics it seems likely that the load-deflection relations of a practical structure must be expressed in the form of either deflection or stiffness influence coefficients. One approach is to employ structural models and to determine the influence coefficients experimentally; it is anticipated that the experimental method will be employed extensively in the future, either in lieu of or as a final check on the result of analysis. However, elaborate models are expensive, they take a long time to build, and tend to become obsolete because of design changes; for these reasons it is considered essential that a continuing research effort should be applied to the development of analytical methods. It is to be expected that modern developments in high-speed digital computing machines will make possible a more fundamental approach to the problems of structural analysis; we shall expect to base our analysis on a more realistic and detailed conceptual model of the real structure than has been used in the past. As indicated by the title, the present paper is exclusively concerned with methods of theoretical analysis; also it is our object to outline the development of a method that is well adapted to the use of high-speed digital computing machinery.

### (II) REVIEW OF EXISTING METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

#### (1) Elementary Theories of Flexure and Torsion

The limitations of these venerable theories are too well known to justify extensive comment. They are

Received June 29, 1955. This paper is based on a paper presented at the Aerelasticity Session, Twenty-Second Annual Meeting, IAS, New York, January 25-29, 1954.

\* Structural Dynamics Unit Chief, Boeing Airplane Company, Seattle Division.

† Associate Professor of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

‡ Professor of Aeronautical Engineering, University of Washington, Seattle.

\*\* Structures Engineer, Structural Dynamics Unit, Boeing Airplane Company, Wichita Division.

805

Figura 10.

descritas cuando surgió el método de Cross. Además, al cambio de enfoque teórico se sumaba ahora una barrera instrumental: los ordenadores con lo que entonces se llamaba “*alta capacidad de cálculo*” eran monstruos misteriosos que se alojaban en templos<sup>2</sup> a los que sólo tenían acceso los sumos sacerdotes del nuevo culto. Por si fuera poco, era preciso utilizar procedimientos numéricos que repugnaban a nuestro espíritu formado en la belleza y exactitud de las soluciones ochocentistas. Ni siquiera el venerado nombre

2. En el curso 1965-66 en la Escuela de Caminos, la bestia, un “terrible” 1620, estaba confinada en las entrañas subterráneas del noble edificio de Alfonso XII, donde sólo en pequeños grupos y con licencia especial era posible acceder.

de Gauss evitaba que considerásemos todo aquello como una despreciable “cuenta de la vieja”.

Ni los geotécnicos, por puro pragmatismo, ni los aeronáuticos, por juventud, tuvieron tantos problemas de conciencia y a ellos se deben probablemente las primeras soluciones con elementos finitos a problemas de mecánica del continuo (v.g.: Jiménez Salas 1982 [55]). Los estructuralistas o bien miraban al foco práctico del cálculo matricial de estructuras (cuando ya dos obras de carácter docente [56, 57] habían vuelto a poner de manifiesto el lugar clave que ocupa el principio de los trabajos virtuales en toda formulación) o bien, los más teóricos, admiraban la extraña forma que tenían los matemáticos de atacar problemas que se creían resueltos [58]. Con la referencia 59, por ejemplo, Alberto Dou participa en el movimiento de lo que ahora se denominan métodos cualitativos [21], que constituyen una brillante síntesis entre las ideas de Signorini en los años 30 y los progresos realizados en los 50 para resolver el problema de existencia mediante la formulación débil de los problemas con valores en el contorno.



**Figura 11. Dou, Jiménez Salas, Páez.**

Con la experiencia en el uso del cálculo matricial, sobre el que enseguida se dispuso de obras clave, tanto traducidas [57] como españolas [60] se intentó pasar a mayores empeños motivados por la participación de Zienkiewicz en el cálculo de algunas presas bóveda españolas y la publicación de su libro [61], donde se ponía de manifiesto la posibilidad de aplicación a problemas no estructurales y que, por tanto, se estaba ante una herramienta de calado incomparable a todas las que se habían dispuesto antes.

Llegaban además ecos de las originales ideas de Irons<sup>3</sup> y del enfoque que, según la tesis doctoral de C. Felippa [62] (1966) colocaba a los elementos finitos en el marco del método de Rayleigh-Ritz y los trabajos virtuales.



Figura 12.

Ello hizo que al volver los ojos a lo que en el ínterin habían estado haciendo los matemáticos se viese que, tanto Courant [63] como Synge [64] manejaban ideas parecidas y que la teoría generalizada de problemas con condiciones en el contorno desarrollada por la escuela de Lions [65] aportaba puntos de reflexión en los que valía la pena entrar, como demostraban Strang y Fix [66] (1973). Precisamente en este mismo año dieron cursos en España Fraeijs de Veubeke, en la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos, y Carlos Brebbia, en el Colegio de Ingenieros de Caminos, donde éste presentó su obra [67], la primera sobre elementos finitos traducida al español.

Por si cabía alguna duda, en la segunda mitad de los 70 se pudo disponer de una fundamentación utilizable para la enseñanza [68, 69] o para la investigación [70], así como de la magistral obra de Bathe y Wilson (1976) [71] con la que medio mundo aprendió las técnicas de programación utilizadas por la escuela de Berkeley.

---

3. Alguien que inventaba un método “frontal”, unos extraños elementos “isoparámetros” o una familia “serendip” merecía ciertamente que se hiciera el esfuerzo de estudiar sus artículos, máxime si, para *más inri*, defendía la integración con el método de Gauss.



En España, en esta época, son dignos de mención dos fenómenos: por un lado se utilizan sistemáticamente programas comerciales de elementos finitos para estructuras de gran responsabilidad como las centrales nucleares, y por otro se produce un cambio de filosofía en la dedicación del profesorado de las Escuelas que conduce a un incremento de la actividad investigadora y a estancias en el extranjero de jóvenes estudiosos, que a su regreso traen los nuevos instrumentos, en cuyo desarrollo a nivel mundial participan [72], o bien permanecen en Universidades extranjeras contribuyendo desde allí al desarrollo del conocimiento, como Roësset, Simó y Ortiz, en USA, Sánchez Palencia en Francia, Carlos Ruiz en Inglaterra, etc.

Los últimos años han visto reforzarse aquellas tendencias debido a la popularización de los ordenadores personales y a su continuo aumento de potencia y de velocidad de cálculo, así como a la aparición de revistas y asociaciones dedicadas a los llamados “*métodos computacionales*” que sistemáticamente organizan congresos de gran éxito. En este ambiente, no es de extrañar que sea habitual la contribución de investigadores españoles al progreso de la mecánica estructural y que, en esa cordillera, hayan surgido picos como los que hoy participan en esta conmemoración, entre los que desgraciadamente no podemos contar con la presencia física de dos de nuestras más interesantes figuras: Emilio Garbayo (1942-1992) y Juan Carlos Simó (1952-1994).

El primero publicó muy pronto artículos relacionados con la inestabilidad de arcos pero su contribución más interesante, truncada por su muerte, es a la teoría matemática de las piezas delgadas. Como es sabido, la formulación



**Figura 13. Garbayo, Simó.**

ingenieril de barras, placas y láminas tiene importantes problemas de correspondencia con los planteamientos tridimensionales, y las dimensiones y forma del cuerpo influyen sobre la validez de las soluciones aproximadas. Ericksen y Truesdell [73] (1958) propusieron utilizar la teoría de los medios multipolares de los Cosserat añadiendo a cada punto de la línea o superficie directriz un sistema de vectores directores con capacidad de deformación. Esta idea ha sido recientemente publicitada por Villaggio [74] (1997) y Antmann [75] (1995), y era el punto de contraste para Garbayo [76], que mantenía con aquéllos una activa correspondencia.

Si Garbayo, salvo esporádicas estancias en USA, desarrolló la mayor parte de su actividad en España, Juan Carlos Simó floreció en el activo ambiente de trabajo de las mejores universidades de California: en Berkeley al principio, donde mantuvo una fructífera colaboración con el Académico Miguel Ortiz, y luego en Stanford. Las raíces de ambos están en línea con las obras de Truesdell [77], Malvern [78] y Gurtin [79] y, sobre todo, con las aplicaciones de la geometría diferencial moderna [80, 22] a la Mecánica. Sobre esta sólida base físico-matemática construyó Simó sus trabajos en métodos computacionales, donde se le deben tanto nuevos tipos de elementos como técnicas de resolución y formulaciones teóricas que llevan su nombre. La Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI), fundada por el empuje e iniciativa de Eugenio Oñate, honra cada cuatro años al joven investigador más prometedor con un premio que lleva también el nombre de Juan Carlos.

## 12.4. ALGUNAS LÍNEAS CON FUTURO

### 12.4.1. Enseñanza

La asimilación de los modelos clásicos y la experiencia con los modernos métodos de ordenador han puesto en cuestión el método tradicional de enseñanza del cálculo de estructuras por agregación de métodos particulares. Estos, en muchos casos, necesitan hipótesis ad-hoc y el estudiante, aunque capaz de resolver el repertorio de problemas típicos que se le plantean, acaba perdido en un mar de casos particulares en los que desaparecen los principios básicos. De esta forma, cuando surge un caso no previsto en el recetario o se produce una innovación que requiere una cierta perspectiva, su indefensión es absoluta.

Este modelo de enseñanza parte también de unas hipótesis falsas en nuestras escuelas de ingeniería de dos ciclos: la falta de formación matemática o mecánica de los estudiantes.

De hecho, al afrontar los cursos de cálculo de estructuras los alumnos dominan la geometría diferencial, el cálculo tensorial y las ecuaciones dife-

renciales, cosa que no siempre sucede con sus maestros. En consecuencia, se da la circunstancia paradójica de que cuando tienen que utilizar aquellas poderosas herramientas en modelos con significado físico se les obliga a partir de cero y a hacer, como por ejemplo diría Truesdell, malas demostraciones del teorema de la divergencia. Todo el sentido de armonía del plan de estudios desaparece, los conocimientos profundos se olvidan y con ello se comienza el proceso de destecnificación y se fomenta la falta de creatividad.

La presencia masiva del ordenador ha roto esta dinámica en dos sentidos: por un lado, ha permitido eliminar el énfasis que se ponía en métodos de resolución de problemas particulares, ya que la potencia de cálculo permite formulaciones generales. Ello implica, en primer lugar, aumentar la complejidad de los problemas con que se puede enfrentar el estudiante, pero también resolver muchos más ejemplos de los que permitían los métodos tradicionales, lo que significa una mayor *experiencia* del comportamiento de los modelos y por tanto un incremento de la intuición mecánica.

Por otro lado, al tratarse de métodos de aplicación general, ha sido preciso eliminar la hojarasca y clarificar los principios básicos, así como crear una notación adecuada al instrumento de cálculo. En este sentido ha sido beneficioso el enorme esfuerzo llevado a cabo en el desarrollo del método de los elementos finitos y de los programas de cálculo que se encuentran disponibles en los ordenadores personales.

En los últimos treinta años ha sido constante la duda sobre cómo aprovechar todas las ventajas de la nueva situación y cómo establecer una enseñanza que no perdiera de vista ni la formación de *conceptos* ni la habilidad de interpretación de resultados.

Tras las líneas anteriores parece claro que la renovación de la enseñanza debe partir de dos premisas:

- a) Al disponer de una poderosa herramienta de cálculo, la materialidad de la resolución numérica importa menos que la formulación del modelo y la interpretación de resultados.
- b) Si se consigue una formulación unificada, una dorsal que articule los conocimientos, será más fácil apreciar la importancia y diferenciación de las hipótesis subyacentes en los modelos de cálculo, y por tanto se facilitará al proyectista la selección del más adecuado a su problema.

En mi opinión, esa línea conductora arranca del principio de los trabajos virtuales y se articula a su alrededor mediante el método de la rigidez. Sobre ella caben pequeñas variaciones para que el estudiante tenga noticia de los métodos históricos.

Cómo armonizar la enseñanza teórica, irrenunciable para la formación, con el tratamiento de modelos mediante programas prefabricados es el desafío que se plantea para el futuro.

### 12.4.2. Investigación

Según se ha insinuado en las líneas anteriores, el progreso de los métodos de cálculo se ha visto afectado por las continuas modificaciones técnicas de los ordenadores que han llevado a cambios en la filosofía de actuación (v.g.: cálculo en paralelo) o al desarrollo de algoritmos numéricos especialmente adaptados al computador (longitud de arco, Lanczos, etc.) que mejoran la rapidez y exactitud de los cálculos. Prescindiendo de estas substanciales aportaciones son dignos de destacar algunos campos que se refieren a la propia **fundamentación** de la mecánica de los medios continuos, al desarrollo de nuevas **leyes de comportamiento**, a la puesta a punto de **métodos numéricos** alternativos al de elementos finitos y a nuevas **aplicaciones**. Clasificación que responde a grandes rasgos a los campos de interés mostrados por Torroja.

En algunos casos se retoman temas clásicos con la nueva óptica y casi siempre se observa que es imposible considerar acabado cualquiera de ellos; un ejemplo típico lo constituyen las formulaciones con elementos de contorno cuya utilidad se suponía limitada a medios lineales heterogéneos a trozos que actualmente están siendo aplicadas a todo tipo de cuestiones no lineales apoyándose en las nuevas formulaciones hipersingulares y en la enorme velocidad de cálculo de los nuevos ordenadores. Lo mismo sucede con formulaciones básicas, como la de los medios orientados o los temas de localización y fractura.

En contra de lo que pudiese parecer, la **fundamentación** conceptual ha sido sometida a una fuerte revisión. La idea más atractiva es pasar de un método inductivo, basado en ensayos de validez limitada, a uno deductivo en el que se haga participar la microestructura para conseguir, a partir de modificaciones en la misma, materiales con propiedades macroscópicas *a medida*. La clave es la consecución de una escala que permita aprovechar las ventajas de la formulación macroscópica tras haber promediado las características microestructurales típicas del material y del fenómeno en estudio [82].

En cualquier caso se necesita una idea clara de la situación respecto a las leyes físicas globales y por ello la formulación termodinámica es imprescindible [83], aunque sigan existiendo polémicas sobre el tratamiento de los procesos irreversibles. Esta misma conflictividad y viveza de investigación existen en la representación de los procesos de localización del fallo [84] que puede influir tanto a escala global como local de la estructura, pudiendo imaginarse lo que ello representa respecto a la reconsideración de los métodos de cálculo generalmente aceptados. Parece precisarse un paso semejante al dado en los problemas de inestabilidad donde la tesis de Koiter

**MACROESCALA  
MEDIO CONTINUO**

**MICROESCALA**

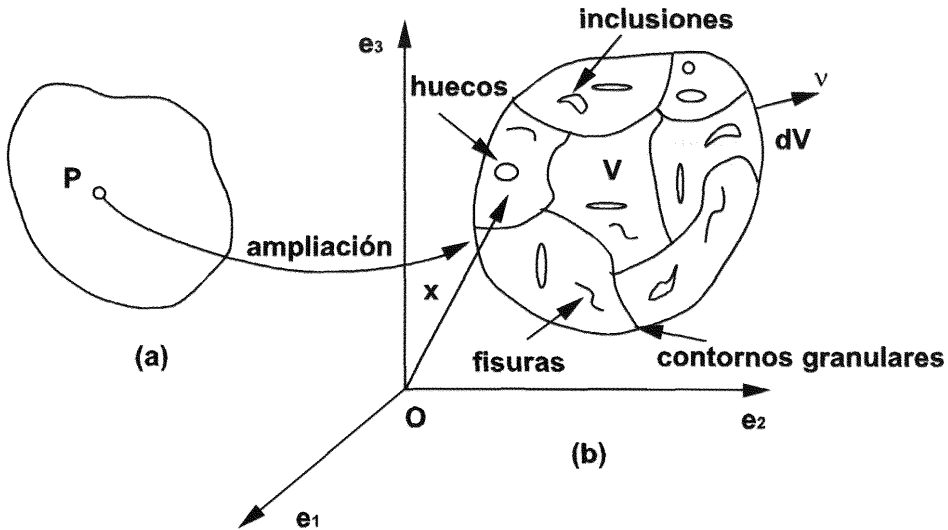
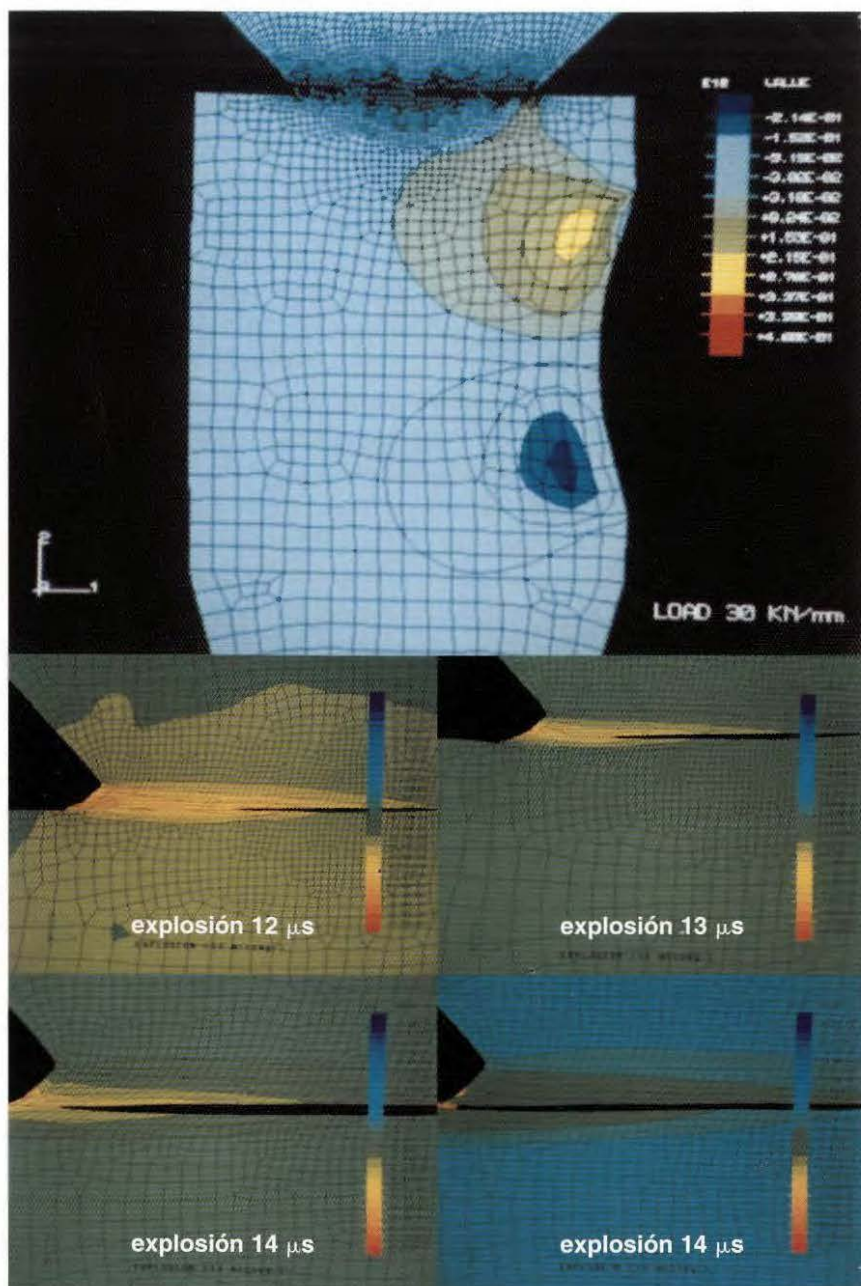


Figura 14. Construcción del volumen representativo.

[49] y la obra precursora de Thompson y Hunt [85] (1973) han permitido encuadrar la investigación en los campos de la teoría de catástrofes y caos [86] que conectan también con los nuevos desarrollos sobre problemas dinámicos no lineales [87]. Cabe citar finalmente las aplicaciones matemáticas a la teoría de fiabilidad de estructuras [88], que ya han sido descritas por Enrique Castillo.

Las **leyes de comportamiento** que se estudian son cada vez más complicadas y se ha asistido a una reconsideración y generalización [89] de las clásicas aproximaciones de plasticidad y viscoelasticidad. Una rama de espectacular desarrollo, a la que se ha referido M. Elices en su capítulo, es la mecánica de la fractura que, desde las ideas clásicas de Griffith (1920), ha evolucionado sin cesar tanto en conceptos como en aplicaciones (figura 15). En otros casos una nueva idea, la de degradación o daño [91], ha permitido reproducir fenómenos muy complejos con formulaciones relativamente sencillas y está en el núcleo de gran cantidad de aplicaciones prácticas actuales [89]. Está, por supuesto, el campo de los materiales compuestos [90], activo desde las primeras teorías desarrolladas en los años 70, y un extraordinario desarrollo de la poroelasticidad [92], basados ambos en sus aplicaciones industriales.

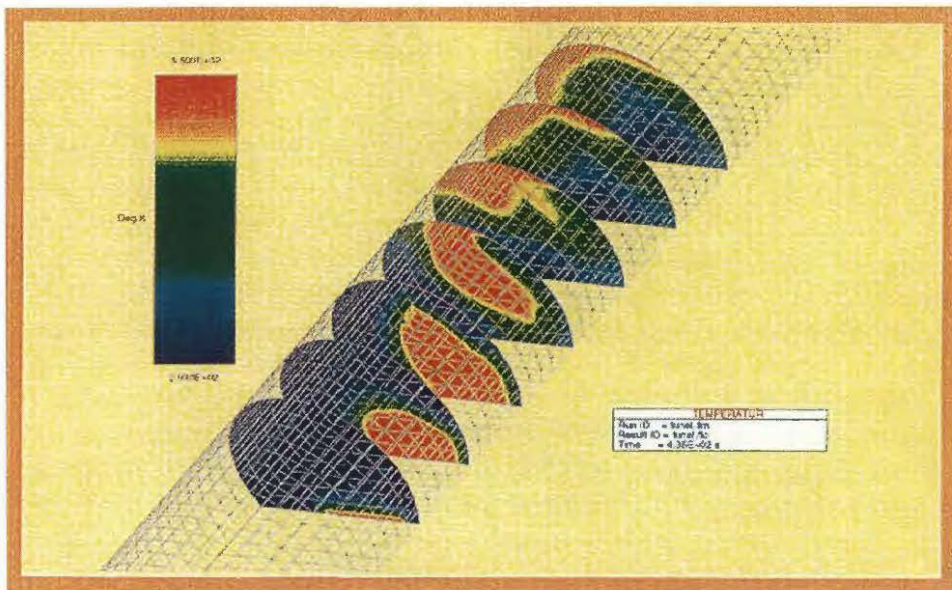


**Figura 15.**

**Estudio de la fractura dinámica y plastificación del anillo central de la caja porta-  
equipos del Ariane 5 (M. Doblaré para la Sociedad de Investigación Estudios y  
Experimentación, S.A. 1992)**



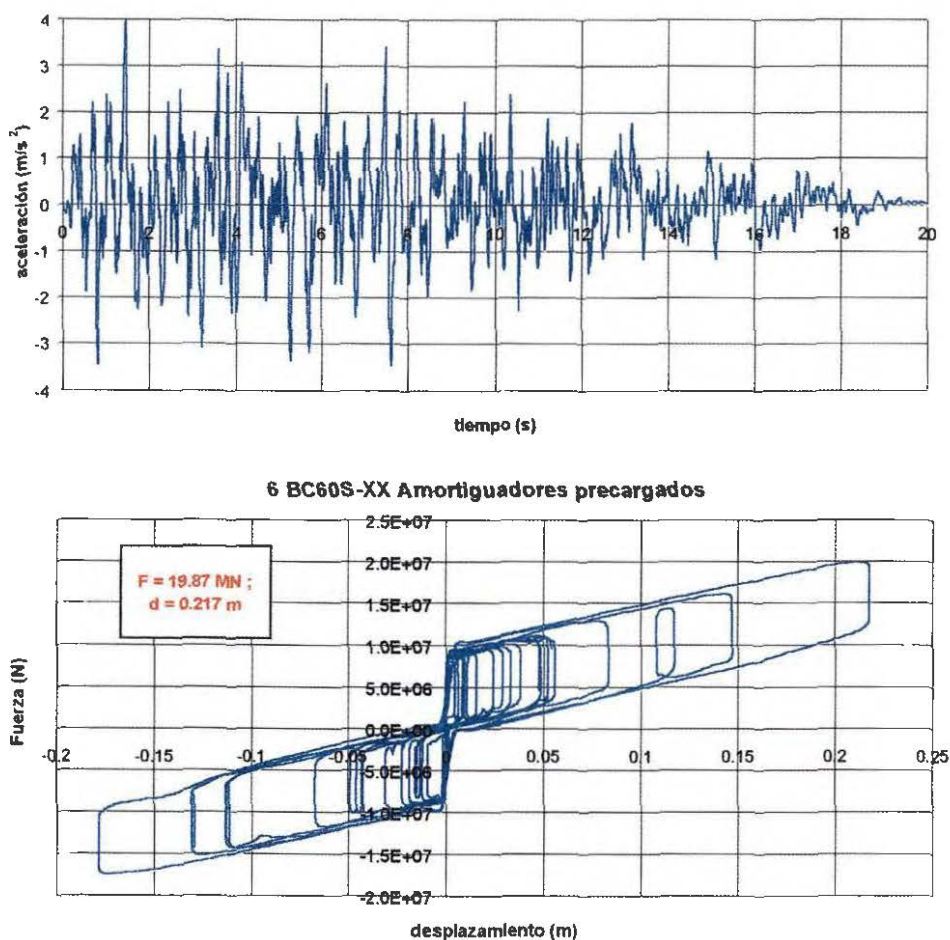
En cuanto a los **métodos** alternativos al de elementos finitos, la búsqueda ha sido continua. Ya se han comentado los métodos de contorno [93] basados en las fórmulas clásicas de representación, que han sido utilizadas para problemas específicos [94] pero que asisten a un desarrollo mantenido. Son dignos de citar otros métodos que se han propuesto como alternativa para problemas no elípticos como el de partículas [95], o el de volúmenes finitos muy usado en fluidos y para el que se dispone de programas comerciales que pueden ser utilizados en problemas recientes (figura 16) que conectan con formulaciones de campos alejados del estructural [96].



**Figura 16.**  
Simulación de incendios en túnel del Negrón II (Sociedad de Investigación,  
Estudios y Experimentación, S.A. 1997)

También son destacables las líneas abiertas que intentan utilizar elementos finitos móviles [97] así como aquellos basados en la autoadaptabilidad de la malla o del grado del polinomio [98] según la magnitud del error cometido, lo que entronca con los métodos espectrales. Cabe citar finalmente dos líneas interesantes que aprovechan la formulación multicampo de los principios variacionales propuestos por C. Felippa [99] y los llamados elementos sin malla [100] donde se aprovecha la experiencia conseguida con los elementos de contorno.

El campo de **nuevas aplicaciones** es interminable, como muestran algunos libros recientes que se refieren a la utilización en estructuras minúsculas [101] o grandes [102]. En este sentido cabe citar la hibridación con las técnicas de control activo y pasivo [103] y robótica, esta última cada vez más aplicada a problemas relacionados con la construcción. Están también las aplicaciones continuas a biología y medicina [104], sin olvidar campos más clásicos [105] pero de interés creciente para la seguridad frente a riesgos naturales (figura 17).



**Figura 17.**  
Movimiento longitudinal del tablero del puente de Maule en Chile  
ante un acelerograma simulado mediante la técnica de ondículas.  
(Centro de Modelado en Ingeniería Mecánica para FHECOR, S.A. 1998)



## 12.5. SIEMPRE SE LLEGA A ALGÚN LADO SI SE CAMINA LO SUFICIENTE

La labor de Torroja en relación con los métodos de cálculo puede ponderarse desde dos puntos de vista: su posición como profesor en la Escuela y su actividad como director del Instituto Técnico.

En el primer caso supo elegir los métodos más actuales de su época e incorporarlos al plan de estudios organizando un esquema escalonado de enseñanza que ha influido en todas las escuelas de ingeniería. Fue capaz además de resumir los conocimientos en oposición a la desesperante colección de casos particulares que abundaban en la literatura de sus predecesores, haciendo perder de vista los principios básicos.

Por otro lado, desde el Instituto Técnico promovió la investigación en temas que, como las leyes de comportamiento y la fiabilidad estructural han mostrado su poderío posterior y creó un foro de discusión por donde pasaron investigadores activos en la reconsideración de la fundamentación de los conocimientos contribuyendo, en una época bien difícil, a colocar a España en el mapa científico del momento.

Es difícil no consolarse con el consejo del gato risueño a Alicia cuando se contempla la enormidad del campo a dominar, se ponderan las limitaciones propias y se considera el complicado encaje que la investigación en nuestro país tiene con los desarrollos industriales.

El estudio de las aportaciones de Eduardo Torroja, que tuvo que trabajar con unos condicionantes mucho más duros, muestra lo acertado del consejo, y su espíritu de curiosidad científica y entusiasmo permanente son un estímulo para todos los que, de una forma u otra, nos sentimos receptores de su legado.

## 12.6. REFERENCIAS

1. G. Galilei: "Diálogo y demostración matemática sobre dos nuevas ciencias". 1638. Traducción al español de Editora Nacional. 1976
2. H. Straub: "A history of civil engineering". Leonard Hill Ltd. 1960
3. J. L. Lagrange: "Mecanique Analytique". 1788. Reimpresión A. Blanchard 1965
4. C. L. M. H. Navier: "Resumé des leçons donnees á l'École des Ponts et Chaussées". Carilian-Goeury 1826
5. C. L. M. H. Navier: "Memoire sur les lois d'équilibre et du mouvement des corps solides elastiques". Bull. Soc. Philomath. 1821
6. A. L. Cauchy: "Exercises de Mathematiques". 1827
7. G. Green: "On the laws of reflection and refraction of light". Trans. Cambr. Phil. Soc. 1837

8. A. Clebsch: "Theorie der Elastizitat fester Körper". Teubner 1862. Traducción francesa de Saint-Venant y Flamant con numerosísimas notas del primero. Dunod 1883.
9. O. Mohr: "Beitrag sur Theorie des Bogenfachwerks". Zeitsch. Des Arch. Und Ing. zu Hannover 1874.
10. C. Culmann: "Die graphische Statik". ETH 1866
11. C. A. P. Castigliano: "Theorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications". Negro 1879
12. H. F. B. Müller-Breslau: "Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen". Baumgartner. 1886
13. F. Crotti: "La teoría dell elasticità". Hoepli 1888
14. F. Engesser: "Über statisch ubbestimmte Träger...". Zeitsch. Archit. Und Ingen. Hannover. 1889
15. J. W. Strutt (Rayleigh): "The theory of sound". Cambridge 1877. Reimpresión Dover 1945
16. W. Ritz: "Über eine neue Methode...". Zeitsch. Reine und Angew. Mathem. 1909
17. S. P. Timoshenko: "Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie". Zeitch. Mathem. und Phys. 1910
18. E. Y F. Cosserat: "Theorie des corps deformables". Hermann. 1909
19. M. Reiner: "Twelve lectures on Theoretical Reology". Amsterdam 1943
20. C. Truesdell: "A program of physical research in classical mechanics". Z. Angew. Math. Phys. 1952
21. P. Villaggio: "Qualitative methods in Elasticity". Noordhoff. 1977
22. J. E. Marsden y T. J. R. Hughes: "Mathematical foundations of elasticity". Prentice Hall 1983
23. J. Mañas: "Eduardo Saavedra, ingeniero y humanista". Turner 1983
24. E. Torroja: "Laboratorios". Revista O. P. Número del Centenario. Mayo 1953
25. Colegio de I. C. C. P. : "J. Eugenio Ribera 1864-1936". Serv. Publ. 1982
26. J. M. de Zafra: "Cálculo de estructuras". 2 tomos. Tejada y Martín. 1915
27. J. M. de Zafra: "Los progresos de la Construcción y de la Mecánica Aplicada". Real Academia de Ciencias. 1919
28. A. Peña Boeuf: "Mecánica Elástica". 2ª edición. 1936
29. B. Granda: "Curso de Mecánica aplicada a la Construcción". Tordesillas 1909
30. C. Lorente de No: "Síntesis de los métodos de la Elasticidad. La pieza elástica". Aguilar 1952
31. H. Cross y N. D. Morgan: "Estructuras continuas de hormigón armado". Dossat 1944
32. C. Fernández Casado: "Cálculo de estructuras reticulares". Dossat. 7ª edición 1958.

33. E. Torroja: "Fundamentos para el cálculo de estructuras lineales planas". Monografías I. T. C. C. 1949
34. E. Torroja: "Determinación de esfuerzos en vigas rectas". Monografías I. T. C. C. 1949
35. E. Torroja: "Cálculo elemental de vigas trianguladas". Monografías I. T. C. C. 1949
36. E. Torroja: "Cálculo de esfuerzos en estructuras con piezas curvas". Monografías I. T. C. C. 1951
37. E. Torroja: "Cálculo de esfuerzos en estructuras reticuladas". Monografías I. T. C. C. 1954
38. E. Torroja: "Lecciones elementales de elasticidad". Dossat 1945
39. E. Torroja: "Sobre el cálculo de estructuras endohiperestáticas". Real Academia de Ciencias 1949
40. D. P. Billington: "The tower and the bridge". Princeton U. P. 1983
41. A. García de Arangoá: "Elasticidad teórica y experimental". Dossat 1945
42. F. Valdés Patac: "Curso de Elasticidad". I. T. C. C. 1949
43. F. Goded: "Elasticidad y funciones de tensión". Dossat. 1959
44. M. Velasco de Pando: "Plasticidad. Nueva teoría y aplicaciones". Esc. Ing. Indust. 1954
45. C. Benito: "Nociones de cálculo plástico". R. O. P. 1959
46. A. Roca y J. M. Sánchez Ron: "Esteban Terradas. Ciencia y Técnica en la España contemporánea". INTA-Serbal. 1990
47. E. Terradas: "De la estabilidad geométrica en estructuras elásticas". Esc. Ing. Caminos. 1926
48. T. V. Karman y M. A. Biot: "Métodos matemáticos en ingeniería". INTA 1945
49. W. T. Koiter: "Over de Stabiliteit van het elastisch Evenwicht". Tesis doctoral. Delft. 1945. Traducido al inglés como: "The stability of elastic equilibrium". Technical report Air Force flight dynamics laboratory. USA 1970
50. G. Millan Barbany: "Introducción a la teoría matemática de la plasticidad". Seminario de Matemática Aplicada. Mayo 1953
51. E. Torroja y A. Pérez: "Set concrete and reinforced concrete". (Cap. VIII en M. Reiner "Building materials; their elasticity and inelasticity"). North Holland 1954
52. J. H. Argyris: Comunicación personal.
53. J. H. Argyris y S. Kelsey: "Energy theorems and structural analysis". Butterworths. 1960
54. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin y L. J. Topp: "Stiffness and deflection analysis of complex structures". Jour. Aeron. Sci. 1956
55. J. A. Jiménez Salas: "Aportaciones científicas españolas a la Geotecnia". Discurso de ingreso en la Real Acad. Ciencias. 1982.

56. B. G. Neal: "Structural theorems and their applications". Pergamon. 1964
57. R. K. Livesley: "Matrix methods of structural analysis". Pergamon. 1964. Traducción española de J. Martínez Calzón para Blume. 1970
58. A. Dou: "On the principle of Saint-Venant". Math. Res. Center. Rep. 472. Wisconsin 1964
59. A. Dou: "Upper estimate of the potential elastic energy of a cylinder". Comm. On pure and app. Mathem. 1966
60. J. Margarit y C. Buxadé: "Cálculo matricial de estructuras de barras". Blume 1970
61. O. C. Zienkiewicz y Y. K. Cheung: "The finite element method". Mc Graw Hill. 1967
62. C. A. Felippa: "Refined finite element analysis of linear and nonlinear bidimensional structures". Tesis doctoral. Berkeley. 1966
63. R. Courant: "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". Bull. Am. Math. Soc. 1943
64. J. L. Synge: "The hypercircle in mathematical physics". Cambridge U. P. 1957
65. J. L. Lions y E. Magenes: "Problèmes aux limites non homogènes et applications". Dunod 1968
66. G. Strang y G. J. Fix: "An analysis of the finite element method". Prentice 1973
67. C. A. Brebbia y J. J. Connor: "Fundamentals of finite element techniques". Butterworths 1973. Traducción española de E. Alarcón para Colegio I. C. C. P. 1975
68. K. Rektorys: "Variational methods in mathematics, science and engineering". Reidel 1975
69. P. M. Prenter: "Splines and variational methods". Wiley 1975
70. J. T. Oden y J. N. Reddy: "Variational methods in theoretical mechanics". Springer 1976
71. K. J. Bathe y E. L. Wilson: "Numerical methods in finite element analysis". Prentice 1976
72. J. Domínguez, C. Brebbia y E. Alarcón: "The boundary element method in elasticity". Int. Jour. of Mech. Sciences. 1978
73. J. L. Ericksen y C. Truesdell: "Exact theory of stress and strain in rods and shells". Arch. Rat. Mech. Anal. 1958
74. P. Villaggio: "Mathematical models for elastic structures". Cambridge U. P. 1997
75. S. S. Antmann: "Nonlinear problems of elasticity". Springer 1995
76. E. Garbayo: "Unicidad y aproximación en ciertos problemas elásticos no-lineales". Tesis doctoral Facultad de Matemáticas. 1983
77. C. Truesdell: "Rational continuum mechanics". Academic Press. 1977

78. L. E. Malvern: "Introduction to the mechanics of a continuous medium". Prentice 1969
79. M. E. Gurtin: "An introduction to continuum mechanics". Academic Press 1981
80. R. Abraham y J. E. Marsden: "Foundations of mechanics". Benjamin/Cummings 1966
81. J. C. Simó y T. J. R. Hughes: "Computational inelasticity". Springer 1997
82. J. Sánchez-Hubert y E. Sánchez Palencia: "Introduction aux methodes asymptotiques et a la homogénéisation". Masson 1992
83. G. D. C. Kuiken: "Thermodynamics os irreversible processes". Wiley 1994
84. Z. P. Bazant y L. Cedolin: "Stability of Structures". Oxford U. P. 1991
85. J. M. T. Thompson y G. W. Hunt: "A general theory of elastic stability". Wiley 1973
86. M. S. El Naschie: "Stress, Stability and Chaos". Mc Graw 1990
87. G. Schmidt y H. Tondl: "Non-linear vibrations". Cambridge U. P. 1986
88. O. Ditlevsen y H. O. Madsen: "Structural reliability methods". Wiley 1996
89. J. Lemaitre y J. L. Chaboche. : "Mechanics of solid materials". Cambrige U. P. 1990
90. O. O. Ochoa y J. N. Reddy: "Finite Element analysis of composite laminates". Kluwer 1992.
91. L. M. Kachanov: "Introduction to continuum damage mechanics". Martinus Nijhoff. 1986
92. T. Bourbié, O. Coussy y B. Zinszener: "Acoustics of porous media". Technip 1986
93. E. Alarcón y P. Reyero: "Guía de introducción al método de los elementos de contorno". E. T. S. Ing. Ind. Madrid 1983
94. J. Domínguez: "Boundary elements in Dynamics". Elsevier 1993
95. R. W. Hockney y J. W. Eastwood: "Computer simulation using particles". Mc. Graw 1981
96. A. Liñán y F. A. Williams: "Fundamental aspects of combustion" Oxford U. P. 1993
97. M. J. Baines: "Moving finite elements". Oxford 1994
98. B. Szabó y I. Babuska: "Finite element analysis". Wiley 1991
99. F. Beltrán: "Estimadores de error basados en principios variacionales multicampo para cálculos con elementos finitos". Tesis doctoral. U. P. M. 1993
100. M. Fleming: "The element-free Galerkin Method for fatigue and quasi-static fracture". Tesis doctoral. Northwestern Univ. 1997

101. P. A. Engel: "Structural analysis of printed circuit boards". Springer 1993
102. S. Utku: "Adaptive structures". CRC Press. 1998
103. D. J. Mead: "Passive vibration control". Wiley 1999
104. F. Jouv  : "Modélisation de l'oeil en   lasticit   non linéaire". Masson 1993
105. D. E. Beskos y S. A. Anagnostopoulos: "Computer analysis and design of earthquake resistant structures". Computational Mechanics. 1997